

فصل سوم ریاضی دهم

توان های گویا و عبارت های جبری

یه سلام حسابی به همه

تابه حال شده از یه چیزی بترسید، اما بعد که باهاش روبه رو شدید، ببینید اون قدرها هم ترسناک نبوده؟ شاید برای بعضی هاتون، ریاضی همین حس رو داشته باشه.

اما این فصل قراره به شما ثابت کنه که ریاضی نه فقط ترسناک نیست، بلکه می تونه یه دوست خیلی خوب باشه! اینجا می خوایم با هم الفبای جبر رو یاد بگیریم و ببینیم چطور می تونیم باهاش حرف بزنیم. با تسلط روی توان ها و عبارت های جبری، انگار یه زبان جدید رو یاد می گیریم که کلید فهمیدن خیلی از مسائل دنیای واقعی رو به ما می ده. پس با ذهن باز و بدون ترس وارد این سفر هیجان انگیز بشید.

توصیه و تجربه : دانش آموز عزیز وقتی ک ما برای هر کاری توی زندگیمون اقدامی انجام می دهیم

میخواهیم

مدام ب خودمون اثبات کنیم ک تا اینجا کافیه و دیگه نیازی نیست دنبالش بریم این حرف رو ذهن ما میزنه و معمولا ذهن ما میخواد با کمترین زحمت بیشترین نتیجه رو بگیره اما در فرآیند یاد گرفتن ریاضی این یک کار ذهن خوب نیست و اگه شما آموزشی خیلی خوب و کاملی از هر مدرسی دیدین و احساس کردین دیگه نیازی به تمرین نداری سخت در اشتباهی!

ریاضی اینجوریه که کار میخواد تمرین میخواد باید پاش بمونی براش عرق بریزی و هربار ذهنت دنبال سوالایی ک از دور سخت به نظر میان باشه و سعی بر حل آنها بکنی این سعی کردنه از تو یه آدم متفاوت میسازه.

از اینکه نتونستی سوالی رو حل کنی خودت رو عذاب نده مجازات نکن با صبوری و استمرار میتونی همه چیو تغییر بدی.

موفق باشی 😊

درس ۱ : ریشه و توان

در سال های قبل با توان و رادیکال آشنا شدیم و دیدم که رادیکال عکس به توان رساندن است و ریشه هم یجورایی مثل رادیکال است.

وقتی میگوییم ریشه دوم عدد ۴ منظور این است که چه اعدادی هستند که اگر ما آنها را به توان ۲ برسانیم حاصل برابر با ۴- می شود.

نمایش محور :

ریشه سوم : وقتی میگوییم ریشه سوم a یعنی چه عددی بوده که به توان ۳ رسیده و به ما a را داده است و آن را با نماد $\sqrt[3]{a}$ نمایش می دهیم.

نکته : ریشه سوم هر عدد با خود آن عدد همیشه هم علامت است.

نمایش محور :

نکته : ریشه سوم اعداد صفر ، ۱ و ۱- با خود آنها برابر است.

مانند ریشه دوم هر عدد مثبت دو تا ریشه چهارم قرینه هم دارد ریشه های چهارم عدد a را با نماد $\sqrt[4]{a}$ و $-\sqrt[4]{a}$ نمایش می دهیم.

مثال : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $(\frac{0}{4} - \frac{0}{3})$ ریشه مرتبه زوج دارد.

ب) هر عدد گنگ مثبت دو تا ریشه چهارم دارد.

پ) ریشه دوم $\frac{9}{4}$ فقط عدد $\frac{3}{2}$ است.

محاسبه مقدار ریشه ها :

اگر عدد a توان n ام عددی باشد که مقدار آن را بلدیم می توانیم جواب دقیق $\sqrt[n]{a}$ را بگوییم.

برای مثال چون 32 همان 2^5 است می گوییم $\sqrt[5]{32} = 2$

اما در مورد $\sqrt[5]{30}$ چنین حرفی زده نمی شود چون نمیتوانیم مقدار دقیق آن را پیدا کنیم فقط می توانیم بگوییم که عدد مذکور بین کدام دو عدد قرار دارد و از مقدار تقریبی استفاده کنیم.

توضیح بیشتر و مثال :

تست : کدام عدد بین ۲ و ۳ نیست؟

$$\sqrt[5]{30}(4)$$

$$\sqrt{5}(3)$$

$$\sqrt[4]{17}(2)$$

$$\sqrt[3]{21}(1)$$

تست : چند عدد طبیعی a وجود دارد که ریشه سوم آن بین ۴ و ۳ و ریشه دوم مثبت آنها بین ۵ و ۶ باشد؟

۱۰(۴

۹(۳

۸(۲

۷(۱

آیا a همیشه بزرگتر از $\sqrt{a}$ است؟ یا اینکه $\sqrt[3]{a}$ همیشه کوچکتر از $\sqrt{a}$ است؟

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20}$$

$$\sqrt[4]{400}$$

$$\sqrt{75}$$

$$\sqrt[3]{-10}$$

$$\sqrt[5]{400}$$

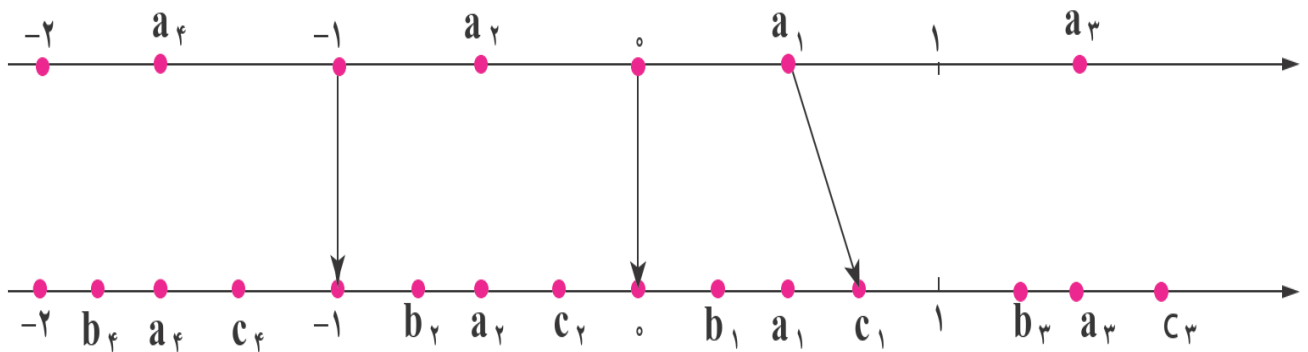
$$\sqrt[3]{-90}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[5]{1}$$

$$\sqrt[3]{20}$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

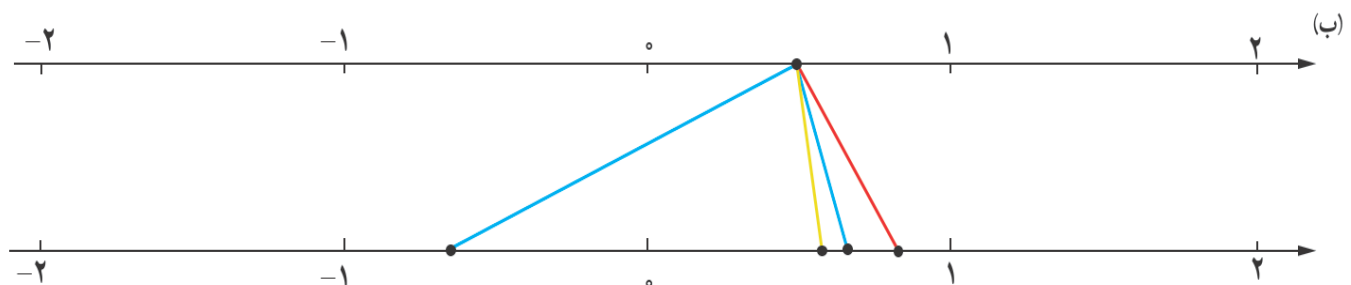
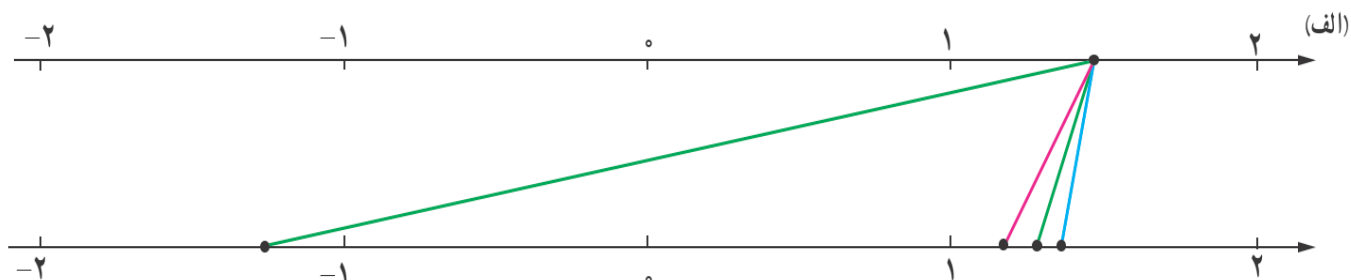
(الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟

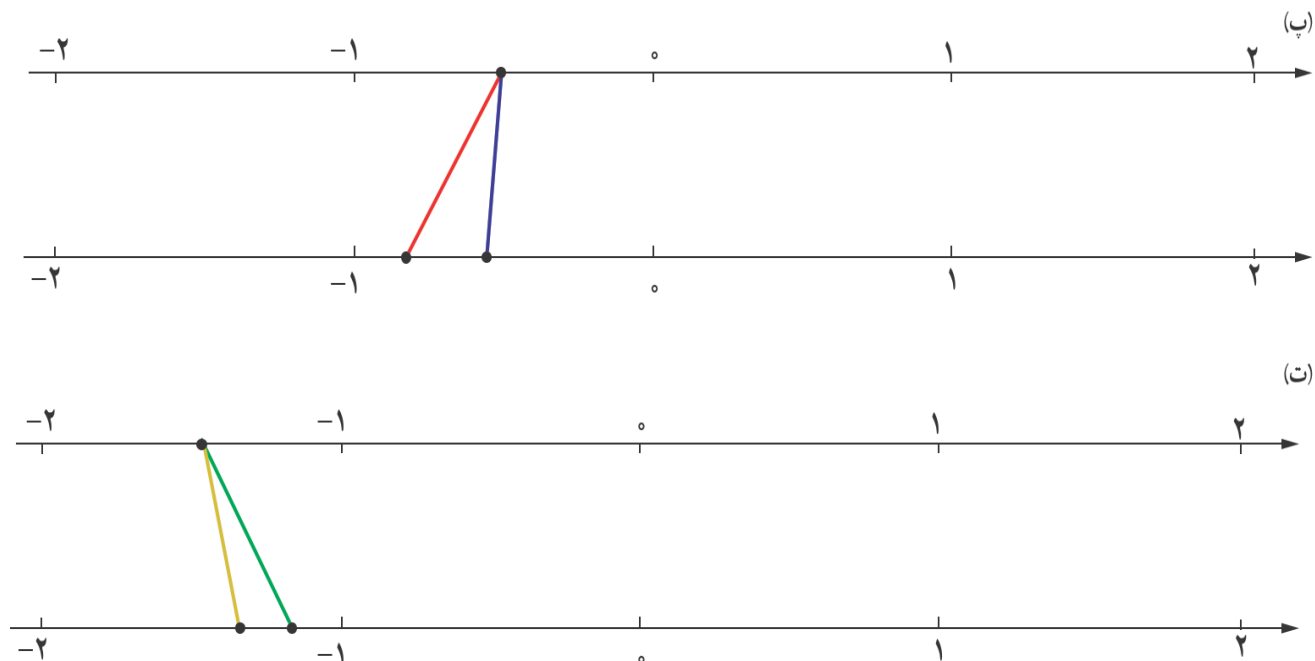
(ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.





۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ برابر است با

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «<»، «>» یا «=» را قرار دهید.

$$(-\frac{1}{10})^5 \bigcirc (-\frac{1}{10})^3$$

$$(\frac{1}{10})^5 \bigcirc (\frac{1}{10})^3$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} \bigcirc \frac{1}{10}$$

(۱) ریشه پنجم ۳۲ چند برابر ریشه چهارم ۴ است؟

(۱) $\sqrt{2}$ یا $-\sqrt{2}$ (۲) ۲ یا -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

(۲) اگر اختلاف ریشه های ششم عدد α برابر با یک و اختلاف ریشه های چهارم آن برابر با β باشد حاصل $\frac{\alpha}{\beta^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{16}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{1}{32}$ (۴) ۶۴

(۳) اگر k یک عدد باشد و $k + 1 < \sqrt[5]{300} < k$ مقدار k کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(۴) اگر $\frac{\sqrt[3]{a} + a^2}{a} = 0$ باشد حاصل $a^3 + a$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) $\sqrt[3]{3}$ (۴) ۳

درس ۲ ریشه n ام :

تا اینجا با ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم آشنا شدیم.

در حالت کلی ریشه n ام عدد a عددی است که اگر آن را به توان n برسانیم به a میرسیم یعنی :

$$b^n = a$$

هر عدد مثبت دو تا ریشه زوج دارد.

هر عدد منفی فقط یک ریشه فرد دارد و ریشه زوج ندارند.

نکته : وقتی n زوج است داریم : $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

توجه داشته باشید که اگر n فرد باشد نیازی به قدر مطلق نداریم.

پرسش : ریشه های دوم سوم و ششم عدد ۶۴ را در یک مجموعه ای مینویسیم این مجموعه چند

زیرمجموعه دارد؟

تست : اگر $a < 0$ حاصل $\sqrt{a^2} - 2\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[5]{a^5}$ کدام است؟

$$-4a(۴)$$

$$-6a(۳)$$

$$-5a(۲)$$

$$-7a(۱)$$

حاصل $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt[4]{(3-\sqrt{3})^4}$ را به دست آورید.

اگر $0 < x < 1$ عبارت $\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{x+1-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

$$x + \frac{1}{x} - \sqrt{x} - 1 \quad (۲) \qquad x - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1 \quad (۱)$$

$$x - \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 1 \quad (۴) \qquad \sqrt{x} - x + \frac{1}{x} - 1 \quad (۳)$$

کار با رادیکال :

عبارت های $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ را در نظر بگیرید.

تذکر : وقتی n زوج است باید زیر رادیکال زوج باشد.

الف) نمی توانیم جمع رادیکال ها را از هم جدا کنیم. یعنی $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ و همچنین

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

ب) در ضرب رادیکال ها اجازه داریم رادیکال ها را از هم جدا کنیم فقط نگران فرجه رادیکال هستیم که اگر زوج باشه نگران علامت ها هستیم.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

همچنین اجازه داریم توان را زیر رادیکال ببریم یعنی $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

پ) اجازه داریم توان و فرجه رادیکال را باهم ساده کنیم یعنی $\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \quad (\text{مثال})$$

ج) اگر بخواهیم عددی را که در بیرون از زادیکال قرار دارد را به داخل رادیکال ببریم کافی

است آن را به توان فرجه رادیکال برسانیم :

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b} \quad \text{اگر } a > 0$$

$$a\sqrt{b} = -(-a)\sqrt{b} = -|a|\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b} \quad \text{اگر } a < 0$$

حاصل $\sqrt{200} + \sqrt{72} - \sqrt{98}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱۵(۴)

۱۳(۳)

۱۱(۲)

۹(۱)

۱ الف) یکی از علامت‌های $<$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$$\left(\frac{\circ}{5}\right)^2 \square \left(\frac{\circ}{5}\right)^3$$

$$\sqrt{\frac{\circ}{5}} \square \sqrt[3]{\frac{\circ}{5}}$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

۲ الف) یکی از علامت‌های $<$ ، $=$ یا $>$ را در $\square$ قرار دهید.

$$\left(-\frac{\circ}{5}\right)^2 \square \left(-\frac{\circ}{5}\right)^3$$

$$(-2)^2 \square (-2)^3$$

$$\left(-\frac{\circ}{5}\right)^3 \square \left(-\frac{\circ}{5}\right)^5$$

$$(-2)^3 \square (-2)^5$$

$$\left(\frac{\circ}{5}\right)^4 \square \left(-\frac{\circ}{5}\right)^2$$

$$(-2)^4 \square (-2)^2$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \sqrt[7]{\frac{1}{128}} =$$

$$\sqrt[4]{3^{-4}} =$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

درس سوم : توان های گویا

توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را به صورت $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ تعریف می کنیم پس ریشه n ام عدد مثبت a همان $a^{\frac{1}{n}}$ است.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \text{ و } \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \text{ و } \sqrt[8]{a} = a^{\frac{1}{8}} \text{ و } \dots$$

توجه داشته باشید که $(-32)^{\frac{1}{5}}$ طبق این تعریفی که انجام داده ایم بی معنی است چون پایه باید مثبت باشد اما $\sqrt[5]{-32} = -2$ معنی دارد.

در حالت کلی اگر $a > 0$ باشد داریم : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

مرور قواعد توان ها :



از رابطه $\sqrt{8}^{2x-1} = \sqrt[3]{4} \times 2^x$ مقدار x را پیدا کنید.

حاصل $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ برابر با چه توانی از x است؟

حاصل $2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$ برابر با چند است؟

حاصل $9^{-0.25} \times \sqrt{8^{-\frac{4}{3}}} \div \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ را به دست آورید.

اگر $52 = \frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}$ باشد مقدار x را به دست آورید.

تمرین

۱) هر يك از توان‌های كسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$16^{\frac{1}{2}} =$$

$$5^{\frac{1}{2}} =$$

$$4^{\frac{3}{7}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} =$$

$$4^{\frac{2}{3}} =$$

$$32^{-\frac{1}{5}} =$$

$$32^{\frac{2}{5}} =$$

$$125^{-\frac{2}{3}} =$$

۲) می‌دانیم

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m, k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2}$ و $\sqrt[6]{2}$ برابرند.

۳) فرض کنیم $a=64$ ، $r=\frac{1}{2}$ و $s=\frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴) حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

درس چهارم : عبارت های جبری

مرور اتحادهایی که از پایه های قبل خوانده ایم :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2c + 3a^2bc + 3abc^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 =$$

عبارت $2x^2 + 3x^2 + 1$ را به ضرب دو عبارت تجزیه کنید.

اتحاد های چاق و لاغر :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$8x^3 - 27$$

$$x^3 + 1$$

$$x^3 - 8$$

$$x^3 - 125$$

$$x^6 - 1$$

۱ هریک از عبارت های زیر را تا حد ممکن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

ت) $a^3b^6 - 8$

پ) $8a^3 + 27$

ب) $x^6 - y^6$

الف) $x^4 - y^4$

۲ مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

ت) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

ب) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{7}}$

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

ت) 105^2

پ) 9999^2

ب) 105^2

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} \quad \text{ب) } \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$$

۵ اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.